

DOI: 10.7652/xjtuxb201912017

结合快速傅里叶变换和线性调频变换的快速波达方向估计

王薇^{1,2}, 殷勤业², 姚博彬³, 穆鹏程²

(1. 西京学院信息工程学院, 710123, 西安; 2. 西安交通大学智能网络与网络安全教育部重点实验室, 710049, 西安; 3. 长安大学电子与控制工程学院, 710064, 西安)

摘要: 针对阵列信号处理中传统多重信号分类(MUSIC)算法估计信号波达方向(DOA)时运算量庞大,导致其在实时性需求较高的场合应用受限的问题,提出一种结合快速傅里叶变换和线性调频变换的快速 DOA 估计算法。该算法以降低 MUSIC 算法谱峰搜索的运算复杂度为目的,首先利用分片搜索的思想并结合快速傅里叶变换对估计的信号子空间矢量进行波束形成,近似估计信号 DOA,获取其对应波束指向及该波束指向对应的空域角度范围,避免了对全空域角度范围的谱峰搜索;然后,针对已确定的空域角度范围,结合线性调频变换算法实现信号 DOA 的精确估计,通过将 MUSIC 算法中对估计的噪声子空间矢量的加权处理转化为可以快速实现的序列的圆周卷积,降低精确估计信号 DOA 时谱峰搜索的运算复杂度。理论分析和仿真实验表明:相比于经典的 MUSIC 算法,所提算法能够在保证信号 DOA 估计精度的前提下将 MUSIC 算法谱峰搜索的运算复杂度降至原复杂度的 10% 以下;对于阵列孔径较大和 DOA 估计精度要求较高的场景,所提算法的计算效率优势更为明显。

关键词: 阵列信号处理;DOA 估计;MUSIC 算法;谱峰搜索;低复杂度

中图分类号: TN959.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2019)12-0131-08

A Fast Direction-of-Arrival Estimation Algorithm Based on Fast Fourier Transform and Chirp Transform

WANG Wei^{1,2}, YIN Qinye², YAO Bobin³, MU Pengcheng²

(1. Department of Information Engineering, XiJing University, Xi'an 710123, China;
2. Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 3. School of Electronic and Control Engineering, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: A novel computationally-efficient direction-of-arrival (DOA) estimation algorithm based on fast Fourier transform (FFT) and chirp transform algorithm (CTA) is proposed to reduce the computational burden of the multiple signal classification (MUSIC) algorithm in array signal processing and to improve the practical applicability of the MUSIC algorithm in the high real-time processing scenarios. Firstly, the piecewise search and FFT are used to form beams for vectors of the estimated signal subspace, and rough DOAs are estimated to obtain beam directions and their angle ranges, so that peak searches in the full angle range are avoided. Then, the CTA is used to obtain an accurate DOA estimation in the determined angle range. Vectors of estimated

收稿日期: 2019-05-10。 作者简介: 王薇(1986—),女,助教,博士生;穆鹏程(通信作者),男,副教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(61601058);陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2018JM6071);西京学院校科研基金资助项目(XJ180211)。

网络出版时间: 2019-09-05 网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20190904.2112.006.html>

noise subspace in MUSIC algorithm are weighted and transformed into circular convolution of a sequence that can be quickly implemented, which reduces the computational complexity of peak search in the determined angle range. Theoretical analysis and simulation results show that the new algorithm reduces the computational complexity of peak search of the MUSIC algorithm to less than 10% of original one on the premise of ensuring the accuracy of signal DOA estimation. Especially, the efficiency advantage of the new algorithm is more obvious for the cases of large number of sensors and high accuracy requirement of DOA estimation

Keywords: array signal processing; DOA estimation; MUSIC algorithm; peak search; low complexity

随着移动通信技术、高精度卫星导航定位以及无人机自主着陆等技术的快速发展,对实际工作环境中电磁信号的有无以及来波方向的快速判定成为了备受关注的课题^[1-6]。阵列信号处理中的波达方向(DOA)估计可以实现同时对空间中不同方向上多个信号源的高分辨率的方向估计。

在众多 DOA 估计算法中,多重信号分类(MUSIC)算法因具有超高分辨率的估计精度和优良的算法稳定性,成为 DOA 估计领域中最重要算法之一^[7-9]。然而,由于 MUSIC 算法中接收信号自相关矩阵的特征值分解和谱峰搜索都涉及庞大的运算量,因此,该算法的计算效率较低,对于阵列孔径较大和 DOA 估计精度要求较高的场景,MUSIC 算法计算效率方面的缺陷制约了其在实时性需求较高的场合中的应用。

为了降低 MUSIC 算法中自相关矩阵特征值分解的运算复杂度,文献[10]提出了 SP-MUSIC 算法。该算法直接利用子空间投影快速构建信号子空间,从根本上避免了自相关矩阵的特征值分解。文献[11]将一维均匀线阵分解为两个阵元数目相同的子阵,根据两个子阵的前、后向互协方差矩阵构造新的互协方差矩阵。通过对新的互协方差矩阵中元素的重排可以构成一个等价的噪声子空间,从而避免了自相关矩阵的特征值分解。

与自相关矩阵特征值分解的运算量相比,MUSIC 算法中空间谱峰值搜索的运算量无疑是巨大的,特别是在 DOA 估计精度要求较高的情况下。为了降低谱峰搜索的运算量,文献[12]通过对噪声子空间矩阵分块和旋转,来降低噪声子空间的维度。但该算法仍需针对全空域角度范围进行空间角度遍历。文献[13-14]利用分片搜索的思想将空间谱峰搜索的角度范围缩小到某些感兴趣的角度范围内,再针对感兴趣的角度范围采用 MUSIC 算法进行精确的峰值搜索。该类算法虽然极大程度地降低了谱

峰搜索的运算量,但在阵元数目较大且 DOA 估计精度要求较高的情况下,直接采用 MUSIC 算法对已确定的角度范围进行精确峰值搜索带来的运算量仍显过高。

本文从分片搜索的角度出发,结合快速傅里叶变换(FFT)和线性调频变换算法(CTA)提出一种低复杂度的快速 DOA 估计算法。首先,利用所提 FFT 预处理算法确定接收信号来波方向所在的若干个空间角度范围,避免对全空域角度范围的搜索;再针对相应的空间角度区域采用运算量较小的 CTA 算法进行精确的峰值搜索,进一步避免精确搜索时采用 MUSIC 算法所带来的繁冗的峰值搜索计算。本文所提算法可在保证 DOA 估计精度的前提下显著降低 MUSIC 算法空间谱峰值搜索的运算复杂度,尤其是在阵列孔径较大且 DOA 估计精度要求较高的场景,本文所提算法的计算效率优势更为明显。

1 阵列模型及 MUSIC 算法

1.1 阵列模型

假设有 $Q(Q < N)$ 个远场窄带信号 $S_1(t), S_2(t), \dots, S_Q(t)$ 同时以方向 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q$ 入射到一个阵元间距为 d 的 N 元均匀线阵,如图 1 所示,以最左侧阵元为参考点,对于方向为 θ_i 的入射信号,其导向矢量为

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \left[1, \exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta_i\right), \dots, \exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} (N-1) \sin\theta_i\right) \right]^T \quad (1)$$

式中: λ 为信号载波波长。 Q 个不同方向的入射信号组成 $N \times Q$ 维导向矢量矩阵

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)] \quad (2)$$

阵列信号的接收矩阵为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (3)$$

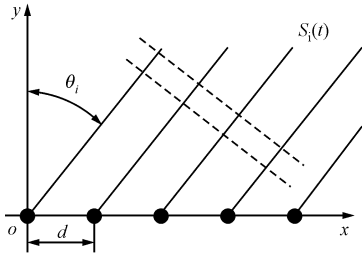


图 1 一维均匀线阵模型

式中: $\mathbf{S}(t) = [S_1(t), S_2(t), \dots, S_Q(t)]^T$; $\mathbf{N}(t)$ 是 N 维加性高斯白噪声列矢量。阵列接收信号的自相关矩阵为

$$\mathbf{R}_X = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}_N \quad (4)$$

式中: $\mathbf{R}_S$ 是信号自相关矩阵; $\mathbf{I}_N$ 是 N 阶单位矩阵; σ^2 是噪声功率。

1.2 MUSIC 算法及其运算量分析

对阵列接收信号的自相关矩阵 $\mathbf{R}_X$ 做特征值分解, 即

$$\mathbf{R}_X = \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (5)$$

式中: $\beta_0 \geq \beta_1 \geq \dots \geq \beta_{Q-1} > \beta_Q = \dots = \beta_{N-1} = \sigma^2$, 其对应的特征向量为 $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{N-1}\}$ 。 $\mathbf{V}_s = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_Q\}$ 和 $\mathbf{V}_N = \{\mathbf{v}_{Q+1}, \mathbf{v}_{Q+2}, \dots, \mathbf{v}_N\}$ 分别为信号子空间和噪声子空间。

实际中, 对阵列接收信号 $\mathbf{X}(t)$ 做 L 次快拍可以得到 $\mathbf{X}(n) (n=1, 2, \dots, L)$, 采用 $\hat{\mathbf{R}}_X$ 对 $\mathbf{R}_X$ 进行估计, 可得

$$\hat{\mathbf{R}}_X = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{X}(i)\mathbf{X}^H(i) \quad (6)$$

对 $\hat{\mathbf{R}}_X$ 做特征值分解可得

$$\hat{\mathbf{R}}_X = \hat{\mathbf{V}}_s \hat{\mathbf{\Lambda}}_s \hat{\mathbf{V}}_s^H + \hat{\mathbf{V}}_N \hat{\mathbf{\Lambda}}_N \hat{\mathbf{V}}_N^H \quad (7)$$

式中: $\hat{\mathbf{V}}_s$ 和 $\hat{\mathbf{V}}_N$ 分别是对信号子空间 $\mathbf{V}_s$ 和噪声子空间 $\mathbf{V}_N$ 的估计; $\hat{\mathbf{\Lambda}}_s$ 和 $\hat{\mathbf{\Lambda}}_N$ 均为对角阵。根据信号子空间和噪声子空间的正交性, MUSIC 算法估计出的空间谱^[15-16]为

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{V}}_N \hat{\mathbf{V}}_N^H \mathbf{a}(\theta)} = \frac{1}{\sum_{i=Q+1}^N |\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{v}}_i|^2} \quad (8)$$

通过对谱函数 $P_{\text{MUSIC}}(\theta)$ 进行谱峰搜索可以得到 Q 个极大值所对应的入射角 θ , 即为信号的 DOA。

综上所述, 导致 MUSIC 算法运算量庞大的步骤主要有两个^[12-14]:

- (1) 自相关矩阵的估计 $\hat{\mathbf{R}}_X$ 的特征值分解;
- (2) 空间谱峰值搜索, 即对整个空间谱范围进行

遍历搜索。

本文采用复数乘法的数量来衡量算法的运算复杂度^[10-14]。自相关矩阵的估计 $\hat{\mathbf{R}}_X$ 特征值分解所用的复数乘法的数目为 $O(N^3)$ 。空间谱峰值搜索所用的复数乘法的数目为 $O(J(N+1)(N-Q))$, 其中, J 是空间谱峰值搜索的总角度数^[12]。通常, 峰值搜索总角度数 J 远大于阵元数 N 。因此, 降低空间谱峰值搜索的运算复杂度可以更有效地提高 MUSIC 算法的运算速度。

2 结合 FFT 和 CTA 的快速 DOA 估计算法

本文所提算法以降低 MUSIC 算法空间谱峰值搜索的运算复杂度为目标, 结合 FFT 和 CTA 实现快速估计信号 DOA。本文所提算法分为两个步骤: ①结合 FFT 确定接收信号来波方向所在的空间角度范围, 即利用所提 FFT 预处理算法快速粗估计 DOA; ②结合 CTA 针对已确定的空间角度区域进行快速精确的峰值搜索, 即利用 CTA 算法快速局域精确估计 DOA。

2.1 FFT 预处理算法快速粗估计 DOA

为避免对全空域角度范围进行谱峰搜索, 本文提出 FFT 预处理算法快速粗略估计信号 DOA 所在的空间角度范围。传统谱估计法的思想是对入射信号进行波束形成, 使波束形成器的输出功率对某个输入方向上的信号为最大, 因此, 本文采用权矢量 $\mathbf{W}$ 对阵列接收信号 $\mathbf{X}(t)$ 做波束形成, 则输出信号为

$$y(t) = \mathbf{W}^H \mathbf{X}(t) = \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{S}(t) + \mathbf{W}^H \mathbf{N}(t) \quad (9)$$

式中: $\mathbf{W} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]^T$ 。调整权矢量 $\mathbf{W}$ 即可使阵列波束指向任意方向 θ 。当波束指向为 θ 时, 其对应的权矢量 $\mathbf{W}_\theta$ ^[14]为

$$\mathbf{W}_\theta = \mathbf{a}(\theta) = \left[1, \exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta\right), \dots, \exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} (N-1) \sin\theta\right) \right]^T \quad (10)$$

进一步将权矢量 $\mathbf{W}_\theta$ 代入式(9)可得

$$y_\theta(t) = \mathbf{W}_\theta^H \mathbf{X}(t) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{X}(t) \quad (11)$$

由此得到传统谱估计法估计出的空间谱为

$$P_T(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_X \mathbf{a}(\theta) = \sum_{i=1}^Q \beta_i |\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{v}}_i|^2 + \sum_{i=Q+1}^N \beta_i |\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{v}}_i|^2 \quad (12)$$

由于式(12)中后一项对谱峰没有贡献, 忽略前一项中的特征值 β_i 和后一项, 可得

$$P'_T(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{V}}_s \hat{\mathbf{V}}_s^H \mathbf{a}(\theta) = \sum_{i=1}^Q |\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{v}}_i|^2 \quad (13)$$

对比式(11)和式(13),可将式(13)看作是利用导向矢量 $\mathbf{a}(\theta)$ 为权矢量对信号子空间的估计 $\hat{\mathbf{V}}_s$ 中的矢量 $\hat{\mathbf{v}}_i(i=1,2,\cdots,Q)$ 进行加权处理,即对 $\hat{\mathbf{v}}_i(i=1,2,\cdots,Q)$ 进行波束形成。

由波束形成可知,不同的 L 个权矢量可在空域中形成相应的 L 个指向不同的波束^[14],故当波束指向为 θ_l 时,可得

$$P'_T(\theta_l) = \sum_{i=1}^Q \left| \mathbf{a}^H(\theta_l) \hat{\mathbf{v}}_i \right|^2 = \sum_{i=1}^Q \left| \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}_i(n) \exp\left(-j \frac{2\pi d}{\lambda} n \sin\theta_l\right) \right|^2 \quad (14)$$

式中: $\hat{v}_i(n)(n=0,1,\cdots,N-1)$ 是矢量 $\hat{\mathbf{v}}_i$ 中的元素。令 $f_l = d \sin\theta_l / \lambda$, 则

$$P'_T(\theta_l) = \sum_{i=1}^Q \left| \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}_i(n) \exp(-j2\pi f_l n) \right|^2 \quad (15)$$

由于式(15)的表达式与离散傅里叶变换(DFT)表达式类似,因此本文考虑利用 FFT 计算式(15)。对于 N 个阵元的均匀线阵,采用 FFT 至多可形成 N 个独立的波束^[14]。因此,采用 $\exp(-j2\pi nl/N)$ 替代 $\exp(-j2\pi f_l n)$, 可得

$$P'_T(\theta_l) = \sum_{i=1}^Q \left| \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}_i(n) \exp\left(-j \frac{2\pi nl}{N}\right) \right|^2 \quad l = 1, 2, \cdots, N \quad (16)$$

对式(16)做 N 点 FFT 变换计算^[17-18],即可快速求出采用 FFT 预处理后的输出 $P'_T(\theta_l)(l=1,2,\cdots,N)$ 。相应地,第 l 个波束指向 θ_l 为

$$\theta_l = \arcsin\left(\frac{\lambda}{Nd}l\right), \quad l = 1, 2, \cdots, N \quad (17)$$

对于 N 个阵元的均匀线阵,FFT 预处理算法形成的 N 个波束可将 $-90^\circ \sim 90^\circ$ 的空域范围分成 N 个子空域范围,每个波束对应一个有限的子空域范围。当入射信号来自 $-90^\circ \sim 90^\circ$ 空域范围内的某个方向上,利用 FFT 计算式(16)可估计出 N 个波束指向上的 $P'_T(\theta_l)(l=1,2,\cdots,N)$,其最大值所对应的波束指向即为入射信号 DOA 的粗略近似估计,其对应的子空域角度范围即为下一步精确估计信号 DOA 的空间谱峰值搜索范围。表 1 给出了阵元数 $N=16, d=\lambda/2$ 时,采用 FFT 预处理算法得到的各波束对应的子空域角度范围。其中,波束 8 对应的角度范围为 $69.9^\circ \sim 90^\circ$ 和 $-90^\circ \sim -69.8^\circ$,这是由于均匀线阵阵列结构的对称性和导向矢量 $\mathbf{a}(\theta)$ 的周期性导致的。

2.2 CTA 算法快速局域精确估计 DOA

对已确定的子空域角度范围进行谱峰搜索时,传统方法通常直接采用 MUSIC 算法对子空域角度

表 1 $N=16$ 时各波束对应的子空域角度范围

波束编号	角度范围	波束编号	角度范围
0	$-3.6^\circ \sim 3.6^\circ$	8	$69.8^\circ \sim 90.0^\circ$ $-90.0^\circ \sim -69.8^\circ$
1	$3.6^\circ \sim 10.9^\circ$	9	$-69.8^\circ \sim -54.3^\circ$
2	$10.9^\circ \sim 18.3^\circ$	10	$-54.3^\circ \sim -43.3^\circ$
3	$18.3^\circ \sim 26.0^\circ$	11	$-43.3^\circ \sim -34.3^\circ$
4	$26.0^\circ \sim 34.3^\circ$	12	$-34.3^\circ \sim -26.0^\circ$
5	$34.3^\circ \sim 43.3^\circ$	13	$-26.0^\circ \sim -18.3^\circ$
6	$43.3^\circ \sim 54.3^\circ$	14	$-18.3^\circ \sim -10.9^\circ$
7	$54.3^\circ \sim 69.8^\circ$	15	$-10.9^\circ \sim -3.6^\circ$

范围内所有角度进行逐个遍历搜索^[12-14]。本文在利用 FFT 预处理算法估计出入射信号 DOA 所在的子空域角度范围后,提出采用运算量较小的 CTA 算法^[19-20]进行局域角度范围内的空间谱峰值搜索,快速完成对信号 DOA 的精确估计。

假设由 FFT 预处理算法确定的空域角度范围为 $\theta_0 \sim \theta_{M-1}$,空间谱峰值搜索的总角度数为 M ,即可得到 $\omega_0 = 2\pi d \sin\theta_0 / \lambda, \omega_{M-1} = 2\pi d \sin\theta_{M-1} / \lambda$ 。在 $\omega_0 \sim \omega_{M-1}$ 范围内均匀地取

$$\omega_k = \omega_0 + k\Delta\omega, \quad k = 0, 1, \cdots, M-1 \quad (18)$$

式中 $\Delta\omega = \frac{\omega_{M-1} - \omega_0}{M-1}$,则 MUSIC 算法估计出的入射角度 $\theta_k(k=0,1,\cdots,M-1)$ 方向上的空间谱如下

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta_k) = \frac{1}{\sum_{i=Q+1}^N \left| \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}_i[n] \exp(-j\omega_k n) \right|^2} \quad (19)$$

式中: $k=0,1,\cdots,M-1$ 。考虑到式(19)与有限长序列的 DFT 结构的相似性,将式(19)的分母部分看作是对噪声特征矢量的估计 $\hat{\mathbf{v}}_i(i=Q+1, Q+2, \cdots, N)$ 做 DFT^[17-18]。如图 2 所示,由于只需要计算单位圆上 $\omega_0 \sim \omega_{M-1}$ 范围内(并非整个单位圆范围内)

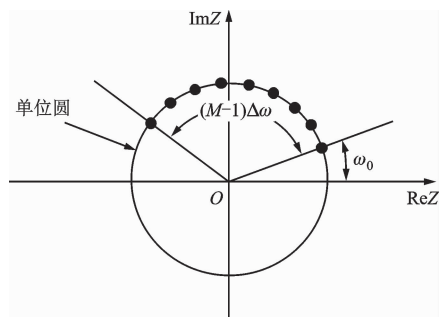


图 2 CTA 算法的频域 DFT 计算示意图

均匀分布的 M 个点的 DFT,因此本文采用 CTA 算法快速计算这 M 个点的 DFT^[19-20]。

将矢量 $\hat{\mathbf{v}}_i$ 视为 N 点有限长序列, $V_i(\exp(j\omega))$ 是 N 点有限长序列 $\hat{\mathbf{v}}_i$ 的傅里叶变换,可得

$$\hat{V}_i(\exp(j\omega_k)) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}_i(n) \exp(-j\omega_0 n) \rho^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (20)$$

为了简化式(20),令 $\rho = \exp(-j\Delta\omega)$, 由于 $nk = \frac{1}{2}[n^2 + k^2 - (k-n)^2]$, 代入式(20)可得

$$\hat{V}_i(\exp(j\omega_k)) = \rho^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}_i(n) \exp(-j\omega_0 n) \rho^{n^2/2} \rho^{-(k-n)^2/2} \quad (21)$$

式中: $k=0, 1, \dots, M-1$ 。由式(21)可以看出,若令 $g_i(n) = \hat{v}_i(n) \exp(-j\omega_0 n) \rho^{n^2/2}$, 则 $\hat{V}_i(\exp(j\omega_k))$ 可以看作是有限长序列的直接卷积,即

$$\hat{V}_i(\exp(j\omega_k)) = \rho^{k^2/2} (g_i(k) * h(k)) \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (22)$$

$$h(k) = \begin{cases} \rho^{-\frac{k^2}{2}}, & k = -N+1, -N+2, \dots, (M-1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (23)$$

已知有限长序列的直接卷积可以用圆周卷积实现,圆周卷积可以通过 FFT 和快速傅里叶逆变换 (IFFT) 来快速计算^[19-20], 故将 MUSIC 算法估计出的空间谱表示为

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta_k) = \frac{1}{\sum_{i=Q+1}^N |\hat{V}_i(\exp(j\omega_k))|^2} \quad (24)$$

式中 $k=0, 1, \dots, M-1$, 则相应的角度 θ_k 为

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{\omega_k \lambda}{2\pi d}\right), \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (25)$$

使空间谱 $P_{\text{MUSIC}}(\theta)$ 取极大值的 Q 个人射角 θ 即为信号的 DOA。

相较于经典 MUSIC 算法,本文所提算法有两个显著特点:①所提 FFT 预处理算法能够快速确定信号 DOA 所在的角度范围,避免全空域范围内的空间角度遍历;②所提 CTA 算法能够快速完成已确定的局域角度范围内的空间谱峰值搜索,避免传统采用 MUSIC 算法进行局域谱峰搜索带来的繁冗的运算量。

2.3 运算复杂度分析

本节从两个方面对比分析所提算法和 MUSIC 算法的运算复杂度:①对比分析采用 FFT 预处理算法粗估计信号 DOA 和直接采用 MUSIC 算法进行

全空域角度范围谱峰搜索的运算复杂度;②对比分析局域谱峰搜索采用 CTA 算法和 MUSIC 算法的运算复杂度。

(1)FFT 预处理算法和 MUSIC 算法的运算复杂度对比分析。设搜索范围 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 内总的搜索角度数为 J , 则采用 MUSIC 算法进行空间谱峰值搜索的运算复杂度为 $O(J(N+1)(N-Q))$ 。相较于 MUSIC 算法,采用 FFT 预处理算法对信号 DOA 进行快速粗略估计的运算复杂度为 $O(((N/2)\text{lb}N + N)Q)$ 。一般而言,有 $J \gg N > Q$, 故谱峰搜索时 MUSIC 算法和 FFT 预处理算法的运算复杂度比值为

$$K^{(1)} = J(N+1)(N-Q) / \left[\left(\frac{1}{2} \text{lb}N + 1 \right) NQ \right] > J(N-Q) / \left[\left(\frac{1}{2} \text{lb}N + 1 \right) Q \right] \quad (26)$$

从式(26)可以看出,FFT 预处理算法带来的运算复杂度的增加远小于 MUSIC 算法谱峰搜索运算复杂度的减少。

(2)局域谱峰搜索采用 CTA 算法和 MUSIC 算法的运算复杂度对比分析。采用 FFT 预处理算法确定局域谱峰搜索的角度范围后,由于 FFT 预处理算法的运算复杂度较低,影响整个谱峰搜索阶段计算效率的主要因素则是局域谱峰搜索时算法的运算复杂度。假设采用 FFT 预处理算法确定的某个空域角度范围内需要搜索的总角度数为 M , 则采用 MUSIC 算法和 CTA 算法进行局域谱峰搜索的运算复杂度分别为 $O(M(N+1)(N-Q))$ 和 $O([N + (N+M-1)\text{lb}(N+M-1) + 2M](N-Q))$ 。在对 DOA 估计精度要求较高的情况下, $M \gg N > Q$, 故此时 MUSIC 算法和 CTA 算法的运算复杂度比值为

$$K^{(2)} = [M(N+1)(N-Q)] / \{ [N + (N+M-1)\text{lb}(N+M-1) + 2M](N-Q) \} > (N+1) / \left[\frac{N}{M} + \left(1 + \frac{N}{M} \right) \text{lb}(N+M-1) + 2 \right] \quad (27)$$

图 3 给出了阵元数 N 和局域谱峰搜索总角度数 M 取不同值时两种算法运算复杂度的对比。可见,在阵元数 N 和总角度数 M 都较大的情况下,相较于 MUSIC 算法,采用 CTA 算法进行局域精确 DOA 估计有明显的计算效率优势。实际上,在估计精度要求较高的情况下,为了保证 DOA 估计的精度,实际中会采用阵元数较大的阵列,且在峰值搜索时会更加细致地遍历已确定的空域角度范围,因此,在局域精确估计信号 DOA 时,CTA 算法相比于

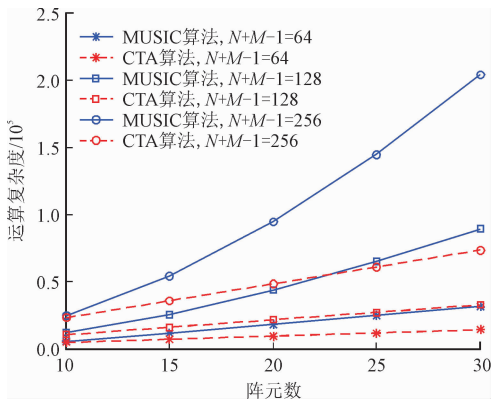


图 3 阵元数 N 及局域谱峰搜索总角度数 M 对不同算法运算复杂度

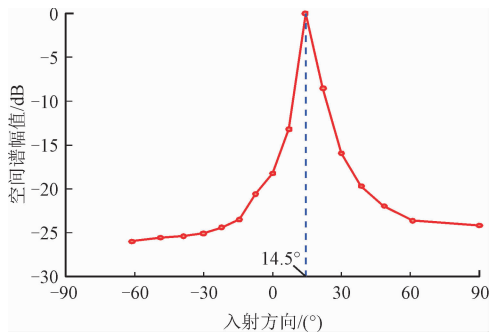
MUSIC 算法能显著提高 DOA 估计的计算效率。这也是本文在局域精确估计信号 DOA 阶段采用 CTA 算法的原因。

上述分析表明,与经典 MUSIC 算法相比,本文所提算法可在基本不影响 MUSIC 算法精度的前提下,显著降低空间谱峰值搜索的运算复杂度,特别是在阵列孔径较大和估计精度要求较高的情况下,本文所提算法的计算效率优势更为明显。

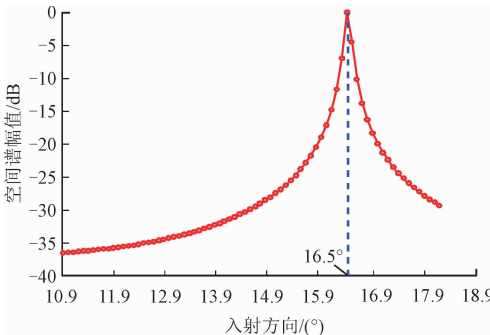
3 仿真结果

为了验证本文所提算法的有效性,下面通过计算机仿真验证所提算法的有效性。仿真参数设置如下:均匀线阵的阵元数 $N=16$,阵元间距 $d=\lambda/2$,快拍数为 1 024,噪声是加性高斯白噪声。

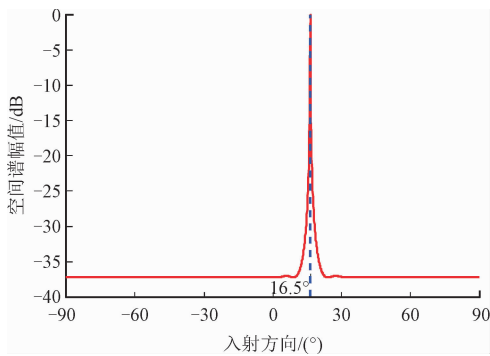
图 4 和图 5 分别给出了不同信噪比(R_{SN})下本文所提算法和 MUSIC 算法的 DOA 估计效果图。选定信号入射角度为 16.5° ,信噪比 $R_{SN}=20$ dB 时,图 4a 和图 4b 分别为采用所提 FFT 预处理算法和所提 CTA 算法给出的估计结果。从图中可以看出,在对入射信号采用 FFT 预处理算法处理后,可以估计出信号 DOA 所在的空间角度范围为 $10.9^\circ \sim 18.3^\circ$,采用 CTA 算法可以在已确定的空间角度范围内进行精确的峰值搜索。与图 4c 中采用 MUSIC 算法进行谱峰搜索的结果相比,CTA 算法可以精确地估计出入射信号的 DOA,且两者的估计精度基本一致。在运算复杂度方面,所提算法谱峰搜索的运算量降为 MUSIC 算法的 5% 左右。选定信号入射角度为 -45.6° ,信噪比 $R_{SN}=5$ dB,图 5a、图 5b 和图 5c 分别给出了采用本文所提 FFT 预处理算法、本文所提 CTA 算法和 MUSIC 算法进行谱峰搜索的估计结果。从图 5 可以看出,本文所提算法在信噪比为 5 dB 的情况下,依然可以精确地估计出入



(a) 本文所提 FFT 预处理算法快速粗估计信号 DOA



(b) 本文所提 CTA 算法局域精确估计信号 DOA



(c) MUSIC 算法估计信号 DOA

图 4 入射角 $\theta=16.5^\circ$ 、 $R_{SN}=20$ dB 时本文所提算法和 MUSIC 算法的信号 DOA 估计效果图

射信号的 DOA。与 MUSIC 算法相比,两者估计精度基本一致,但所提算法谱峰搜索的运算复杂度降为 MUSIC 算法的 4% 左右。

图 6 给出了所提算法采用 FFT 预处理算法正确估计出信号 DOA 所在空间角度范围的概率随信噪比和信源数目的对比关系。其中,信源的信噪比范围为 $-15 \sim 20$ dB,信源数 Q 分别取 1、3 和 5,信号入射角度在 $-60^\circ \sim 60^\circ$ 之间均匀分布。由图 6 可见,随着入射信号信噪比的增加,本文采用 FFT 预处理算法能够正确估计出信号 DOA 所在空间角度范围的概率大幅提升。在信噪比大于 -5 dB 的情况下,FFT 预处理算法正确估计出信号 DOA 所在

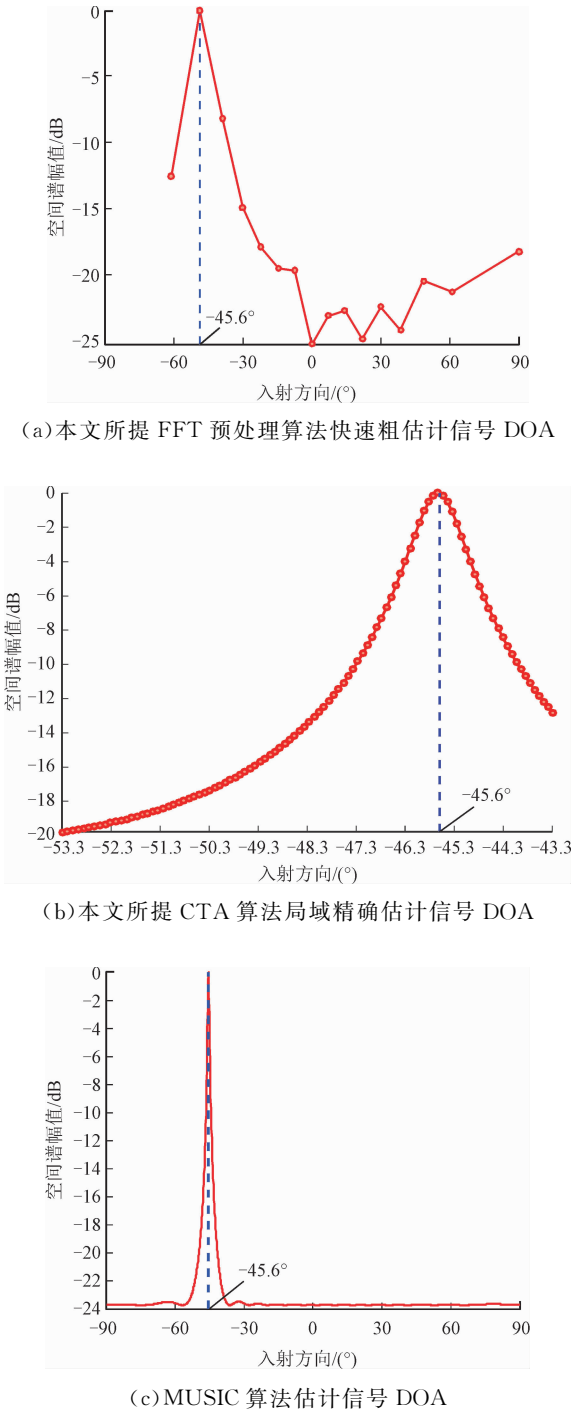


图 5 入射角 $\theta=-45.6^{\circ}$ 、 $R_{\text{SN}}=5\text{ dB}$ 时本文所提算法和 MUSIC 算法的信号 DOA 估计效果图

空间角度范围的概率逼近 100%，保证了 FFT 预处理算法快速粗估计信号 DOA 的正确性。在低信噪比(小于 -5 dB)下,本文采用 FFT 预处理算法正确估计出信号 DOA 所在空间角度范围的概率随着入射信源数目的增加而有所下降,但在入射信号信噪比大于 -5 dB 的情况下,入射信源数目的增加对 FFT 预处理算法估计出信号 DOA 所在空间角度范围的正确率几乎没有影响。

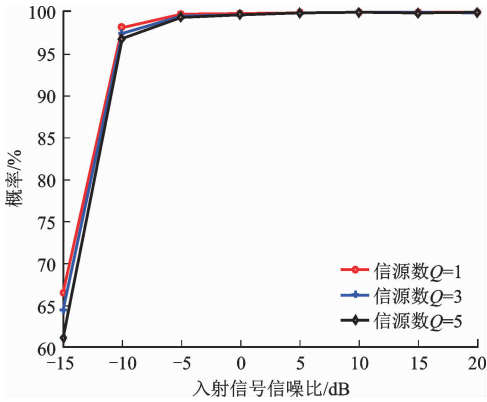


图 6 FFT 预处理算法正确估计出信号 DOA 所在空间角度范围的概率与入射信号信噪比和信源数的关系

图 7 给出了不同算法估计误差随信噪比的变化。选定信源的入射角度分别为 47° 和 -25° , 信源的信噪比范围为 $-10\sim 20\text{ dB}$ 。从图中可以看出,3 种算法的估计误差都随着信噪比的增加而减小,文献[12]所提算法的估计误差明显大于本文所提算法和 MUSIC 算法,本文所提算法与 MUSIC 算法的估计误差相差较小,估计精度基本一致。

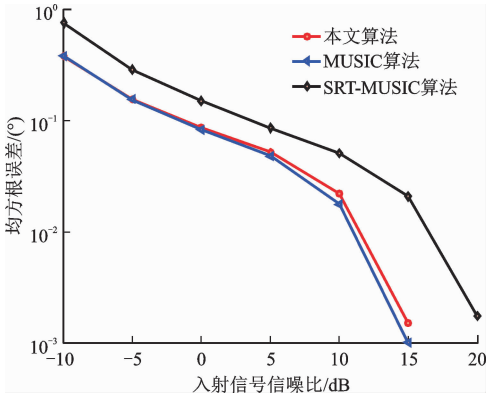


图 7 不同算法估计精度和入射信号信噪比的关系

图 8 给出了采用本文所提算法, MUSIC 算法和文献[12]所提算法进行 DOA 估计时计算机时间开销的对比情况。仿真结果表明:当选定信源的入射

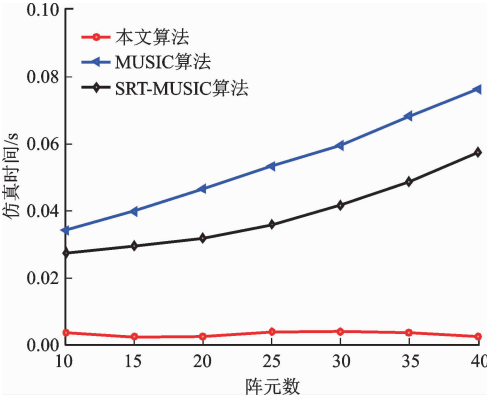


图 8 入射角 $\theta=45^{\circ}$ 时不同算法仿真时间和阵元数的关系

角度为 45° , 角度搜索间隔为 0.05° 时, 本文所提算法的时间开销明显小于其他两种算法; 与 MUSIC 算法相比, 本文所提算法的计算机时间开销降至 MUSIC 算法的 10% 以下; 随着阵元数 N 的增加, 相较于其他两种算法, 本文所提算法的计算效率优势越发明显。

4 结 论

针对信号 DOA 估计中 MUSIC 算法运算复杂度过高的问题, 本文提出一种利用 FFT 和 CTA 的低复杂度信号 DOA 估计算法。先通过 FFT 预处理算法对信号 DOA 进行粗略估计, 压缩精确搜索的空间角度范围; 再针对已确定的空间角度范围采用 CTA 算法进行精确的空间谱峰值搜索, 进一步压缩谱峰搜索带来的运算复杂度。理论分析和仿真结果表明: 本文所提算法能在保证估计精度的情况下将 MUSIC 算法空间谱峰值搜索的运算复杂度大幅降低至原复杂度的 10% 以下; 针对阵元数较大且 DOA 估计精度要求较高的情况, 本文所提算法的计算效率优势更为明显。

参考文献:

- [1] PASCAL V, XAVIER M, PHILIPPE L. Performance analysis of an improved MUSIC DOA estimator [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(23): 6407-6422.
- [2] YAO Bobin, DONG Zhi, ZHANG Weile, et al. Degree-of-freedom strengthened cascade array for DOD-DOA estimation in MIMO array systems [J]. Sensors, 2018, 18(5): 1-20.
- [3] HU Yu, YU Xiaoqin. Research on the application of compressive sensing theory in DOA estimation [C]// 2017 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2017: 485-489.
- [4] LIU Guohong, CHEN Hong, SUN Xiaoying, et al. Modified MUSIC algorithm for DOA estimation with Nyström approximation [J]. IEEE Sensors Journal, 2016, 16(12): 4673-4674.
- [5] VALLET P, LOUBATON P. On the performance of MUSIC with Toeplitz rectification in the context of large arrays [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(22): 5848-5859.
- [6] JEONG S H, WON Y S, SHIN D S. Fast DOA estimation method based on MUSIC algorithm combined newton method for FMCW radar [C]// 2019 IEEE MTT-S International Conference on Microwaves for Intelligent Mobility. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2019: 812-814.
- [7] LIU Aihua, ZHANG Xin, YANG Qiang, et al. Fast DOA estimation algorithms for sparse uniform linear array with multiple integer frequencies [J]. IEEE Access, 2018, 6: 29952-29965.
- [8] YAN Fenggang, JIN Ming, QIAO Xiaolin, et al. Low-complexity DOA estimation based on compressed MUSIC and its performance analysis [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(8): 1915-1929.
- [9] SHU Feng, QIN Yaolu, LIU Tingting, et al. Low-complexity and high-resolution DOA estimation for hybrid analog and digital massive MIMO receive array [J]. IEEE Transactions on Communications, 2019, 66(6): 2487-2501.
- [10] CAI Jingjing, LI Peng, ZHANG Yinping, et al. A fast DOA estimation algorithm based on subspace projection [C]// 2014 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2014: 199-203.
- [11] RONG Jiajia, YAN Fenggang, LIU Shuai. Computationally efficient direction of arrival estimation without subspace decomposition [C]// 2016 IEEE 13th International Conference on Signal Processing. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2016: 466-469.
- [12] 闫锋刚, 齐晓辉, 刘帅, 等. 基于子空间旋转变换的低复杂度波达角估计算法 [J]. 电子与信息学报, 2016, 38(3): 629-634.
YAN Fenggang, QI Xiaohui, LIU Shuai, et al. Overview of efficient algorithms for super-resolution DOA estimates [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2016, 38(3): 629-634.
- [13] 任晓航, 单宝堂, 吴昊. 新型快速 DOA 估计算法 [J]. 国外电子测量技术, 2016, 35(8): 22-25.
REN Xiaohang, SHAN Baotang, WU Hao. A new algorithm of fast DOA [J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2016, 35(8): 22-25.
- [14] 计征宇, 杨向华. 基于 FFT 与 MUSIC 的改进 DOA 估计算法 [J]. 系统仿真学报, 2010, 22(2): 487-490.
JI Zhengyu, YANG Xianghua. Improved algorithm of DOA based on FFT and MUSIC [J]. Journal of System Simulation, 2010, 22(2): 487-490.

(下转第 160 页)